مبرهنة :

ليكن A جبري فوق الحلقة R و I, J مثاليين في A عندئذ كل من $I\cap J$ ، $I+J$ هو مثالي في A

البرهان :

$I+J$ مثالي في A. أما $I\cap J$ جبر جزئي في A ويبقى أن نبين أنه من أجل كل $a\in A$ فإن

$$d_a(I\cap J)\subseteq I\cap J$$

ليكن $x\in I\cap J$ عندئذ

$$x\in I \;,\; d_a(x)\in I$$

$$x\in J \quad d_a(x)\in J$$

$$\Rightarrow d_a(x)\in I\cap J$$

ومنه $I\cap J$ مثالي

مبرهنة التماثل الثانية :

ليكن A جبري فوق الحلقة التبديلية الواحدية R و J, I مثاليين في A عندئذ

$$\frac{I+J}{I}\simeq\frac{J}{I\cap J}$$

البرهان :

لنعرف العلاقة $\ell : J\longrightarrow \frac{I+J}{I}$ بالشكل

$$\forall x\in J : \ell(x)=x+I$$

إذن ℓ تطبيق لأنه من أجل كل $a,b\in J$ بحيث $a=b$ فإن

$$a+I=b+I\Rightarrow \ell(a)=\ell(b)$$

ومنه ℓ تشاكل لأن

$$\ell(a+b)=(a+b)+I=(a+I)+(b+I)=\ell(a)+\ell(b)$$

$$\forall \lambda\in R \;;\; \ell(\lambda a)=(\lambda a)+I=\lambda(a+I)=\lambda\,\ell(a)$$

$$\ell([a,b])=[a,b]+I=[a+I,b+I]=[\ell(a),\ell(b)]$$

أي أن h تشاكل جبور لي

لأن $\overline{z} \in \frac{I+J}{I}$ عندئذٍ $z \in I+J$ ، $\overline{z} = z + I$

وبالتالي يوجد $x \in I$ ، $y \in J$ بحيث $z = x+y$ ومنه

$$\overline{z} = z + I = (x+y) + I$$
$$= (x+I) + (y+I)$$

وحسب مبرهنة التشاكل الأولى نجد أن

$$\frac{J}{\ker h} \cong \frac{I+J}{I}$$

لنبين أن $\ker h = I \cap J$

$$\ker h = \{x \in J \ ; \ h(x) = I\}$$
$$= \{x \in J \ ; \ x+I = I\}$$
$$= \{x \in J \ ; \ x \in I\} = I \cap J$$

تمرين:

الإسقاط في أي جبر لي هو تشاكل جبور لي غامر

البرهان:

ليكن A جبر لي، I مثالي في A لنعرف الدالة $f : A \longrightarrow A/I$

$\forall x \in A \quad f(x) = x + I$

f تطبيق لأن $\forall x, y \in A \quad x = y$

$$x + I = y + I$$
$$\Rightarrow f(x) = f(y)$$

f تشاكل جبور لي لأن

$$\forall x, y \in A \quad \lambda \in R : \ f(x+y) = (x+y) + I = (x+I) + (y+I)$$
$$= f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda x + I = \lambda(x+I) = \lambda f(x)$$
$$f([x,y]) = [x,y] + I = [x+I, y+I] = [f(x), f(y)]$$

إن f تامر لأن $\forall z+I \in A/_I$ $f(z)=z+I \in A/_I$

لنرهن أن $ker f = I$

$\forall a \in ker f ; f(a) = a+I \in I$

$\Rightarrow ker f \subset I$

$\forall x \in I \quad x+I = I \Rightarrow x \in ker f$

$\Rightarrow I \subseteq ker f$

ومن الرهنامين تنتج المساواة

مبرهنة:

ليكن A جبرلي فوق الحلقة R إن الجزئة $Inn(A)$ تشكل مثالياً في $Der(A)$

البرهان:

من جهة ثانية إن $\phi \neq Inn(A) \subseteq Der(A)$

$Inn(A) = \{da : a \in A\}$

إن $\forall da, db \in Inn(A) \quad \forall x \in A$

$(da-db)(x) = d_a(x) - d_b(x)$

$= [a,x] - [b,x] = [a-b,x] = d_{a-b}(x)$

ومنه $d_a - d_b = d_{a-b} \in Inn(A)$

$\forall \lambda \in R \quad \forall x \in A$

~~$d_{\lambda a}$~~ $(\lambda d_a)(x) = \lambda d_a(x) = \lambda [a,x] = [\lambda a, x]$

$= d_{\lambda a}(x)$

$\Rightarrow$ ~~(λd_a)~~ $\lambda d_a = d_{\lambda a} \in Inn(a)$

وهذا يعني أن الجزئة $Inn(A)$ معطى جزئي في $Der(A)$

ليكن $a \in A$ ولنبرهن أن $d_a(Inn(A)) \subseteq Inn(A)$

ليكن $d_c \in Inn(A)$ عندئذ يوجد $c \in A$ بحيث أيا كان $x \in A$ فإن

$d_a(d_c)(x) = d_c(x) = [c,x] \in A$

$$d_a([c,x]) = [d_a(c), x] + [c, d_a(x)]$$

نطبق الفرض الثاني

$$[d_a(c), x] = d_a([c,x]) - [c, d_a(x)]$$

$$d_{d_a(c)}(x) = d_a(d_c(x)) - d_c(d_a(x)) = (d_a d_c - d_c d_a)(x)$$
$$= [d_a, d_c](x)$$

ومنه $d_a(d_c) = d_{d_a(c) \in A} \in Inn(A) \Leftarrow d_{d_a(c)} = [d_a, d_c]$

ومنه $Inn(A)$ مثالي في $Der(A)$

تعريف:

ليكن A جبري فوق الحلقة R الحقيقية.

$$Z(A) = \{a ; a\in A : [a,x] = 0 \quad \forall x \in A\}$$

تشكل مثالية في A يسمى مركز الجبري A

البرهان:

$$\phi \neq Z(A) \subseteq A$$

لأن $\forall x\in A : [0,x] = 0 \Rightarrow 0 \in Z(A)$

لنثبت أن $Z(A)$ معدل جزئي: $\forall a,b \in Z(A) : [a,x] = 0$ و $[b,x]=0$ $\forall x \in A$

$$[a-b, x] = [a,x] - [b,x] = 0 - 0 = 0 \Rightarrow a-b \in Z(A)$$

$$\forall \lambda \in R, a \in Z(A) : [a,x] = 0 \quad \forall x \in A$$
$$\Rightarrow [\lambda a, x] = \lambda [a,x] = \lambda . 0 = 0 \Rightarrow \lambda a \in Z(A)$$

ومنه نجد $Z(A)$ معدل جزئي في A

$$\forall c \in A : d_c(Z(A)) \subseteq Z(A) \ ??$$

ليكن $a \in Z(A)$ عنصر لنبرهن أن

~~$d_c(a) = [c,a] = -[a,c] = 0$~~ $d_c(a) \in Z(A)$

$\forall x \in A \quad [d_c(a), x] \overset{?}{=} 0$

$[d_c(a), x] = [[c,a], x]$

بمتطابقة جاكوبي: $[x,[c,a]] + [c,[a,x]] + [a,[x,c]] = 0$

$$[[c,a],x] = [c,\underbrace{[a,x]}_{=0}] + [a,\underbrace{[x,c]}_{\in A}]$$

$$= [c,0] + 0 = 0$$

$\Rightarrow [d_c(a), x] = 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow d_c(a) \in Z(A)$

وبالتالي $Z(A)$ مثالي في A

مبرهنة :

ليكن A جبر لي فوق الحقل التبديلي الواحدي R عندئذٍ

$$\frac{A}{Z(A)} \cong Inn(A)$$

البرهان :

$\psi : A \longrightarrow Inn(A)$

$\forall a \in A \; ; \; \psi(a) = d_a$

$\forall a,b \in A \; ; \; a = b \Rightarrow [a,x] = [b,x]$

$d_a(x) = d_b(x)$

$\Rightarrow d_a = d_b$

$\psi(a) = \psi(b)$

وبالتالي ψ تطبيق

لنبرهن أنه تشاكل

$\forall a,b \in A \quad \psi(a+b) = d_{a+b}$

$\forall x \in A \; ; \; d_{a+b}(x) = [a+b, x] = [a,x] + [b,x]$

$= d_a(x) + d_b(x)$

$(d_a + d_b)(x) \Rightarrow d_{a+b} = d_a + d_b \Rightarrow \psi(a+b) = d_{a+b} = d_a + d_b$

$= \psi(a) + \psi(b)$

$\forall \lambda \in R \quad \psi(\lambda a) = d_{\lambda a} \; ; \; \forall x \in A \quad d_{\lambda a}(x) = [\lambda a, x] = \lambda [a,x]$

$= \lambda d_a(x) = (\lambda d_a)(x) \Rightarrow d_{\lambda a} = \lambda d_a$

$\psi(\lambda a) = d_{\lambda a} = \lambda d_a = \lambda \psi(a)$

$\psi([a,b]) = d_{[a,b]} \quad \forall x \in A ; d_{[a,b]}(x) = [[a,b],x]$

$[x,[a,b]] + [a,[b,x]] + [b,[x,a]] = 0$

$[[a,b],x] = [a,[b,x]] + [b,[x,a]]$

$[[a,b],x] = [a, d_b(x)] - [b,[a,x]]$

$= [a, d_b(x)] - [b, d_a(x)]$

$\Rightarrow d_a(d_b(x)) - d_b(d_a(x)) = d_a d_b(x) - d_b d_a(x)$

$\Rightarrow (d_a d_b - d_b d_a)(x) = [d_a, d_b](x)$

$d_{[a,b]} = [d_a, d_b] \Rightarrow \psi([a,b]) = d_{[a,b]} = [d_a, d_b]$

$= [\psi(a), \psi(b)]$

ومنه فإن ψ تشاكل جبور لي

إذا كان ψ غامر لأنه إذا كان $d_c \in Inn(A)$ فإن $c \in A$ بحيث

$\psi(c) = d_c$

وحسب مبرهنة التشاكل الأول فإن

$A/_{ker\,\psi} \cong Inn(A)$

نبرهن أن $ker\,\psi = Z(A)$

$\forall a \in ker\,\psi \Rightarrow \psi(a) = d_a \quad \forall x \in A ; d_a(x) = d_0(x)$

$[a,x] = [0,x] = 0$

$\Rightarrow a \in Z(A)$

$\Rightarrow ker\,\psi \subseteq Z(A)$

التضمين العكسي

$\forall b \in Z(A) ; \forall x \in A ; [b,x] = 0$

$d_b(x) = 0 = d_0(x) \Rightarrow d_b = d_0 \Rightarrow \psi(b) = d_0$

من الاحتواءين

$\Rightarrow b \in \ker \psi \Rightarrow Z(A) \subseteq \ker \psi \Rightarrow Z(A) = \ker \psi$

مبرهنة:

ليكن $f: A \to B$ تشاكل جبري لي على R ولتكن $I \subseteq \ker(f)$ مثالية في A عندئذ يوجد تشاكل جبري لي وحيد

$$\Theta: A/I \longrightarrow B$$

بحيث $\Theta \circ \pi = f$ حيث $\pi: A \to A/I$ التشاكل القانوني الناتج

البرهان:

نعرف الدالة $\Theta: A/I \longrightarrow B$ بالشكل الآتي: $\forall a+I \in A/I$

حيث $a \in A$ لدينا

$$\Theta(a+I) = f(a)$$

1) Θ معرفة جيداً

$\forall a+I, b+I \in A/I$; $a+I = b+I$

$(a+I) - (b+I) = I$ كون A/I جبر خارج القسمة عنصره الصفري

$(a-b)+I = I \Rightarrow (a-b) \in I \subseteq \ker(f)$

وبالتالي $\Rightarrow f(a-b) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \Theta(a+I) = \Theta(b+I)$

نبرهن أن Θ تشاكل جبري

$\Theta((a+I)+(b+I)) = \Theta((a+b)+I) = f(a+b) = f(a)+f(b)$ (f تشاكل)

$= \Theta(a+I) + \Theta(b+I)$

$\forall \lambda \in R$; $\Theta(\lambda(a+I)) = \Theta(\lambda a + I) = f(\lambda a) = \lambda f(a)$

$= \lambda\, \Theta(a+I)$

$f([a,b]) = [f(a), f(b)] = [\Theta(a+I), \Theta(b+I)]$

ومنه نجد أن Θ تشاكل جبري لي ولنثبت أنه يحقق $\pi: A \to A/I \xrightarrow{\Theta} B : \Theta\pi = f$

$\forall a \in A$; $\pi(a) = a+I$. $(\Theta(\pi(a)) = \Theta(a+I) = f(a)$

$(\Theta\pi)(a) = f(a)$

$\Theta\pi = f$

لتكن $\mu : A/_I \longrightarrow B$ تشاكل حلقي آخر يحقق

لنثبت الوحدانية $\mu\pi = f \Rightarrow \Theta\pi = \mu\pi$

$\forall\, a+I \in A/_I \Rightarrow \Theta(a+I) = \Theta(\pi(a)) = \Theta\pi(a)$

$= \mu\pi(a) = \mu(a+I)$

ومنه ثبت $\mu = \Theta$

انتهت الإجابة

عطلة جميلة للجميع